

課題1.3

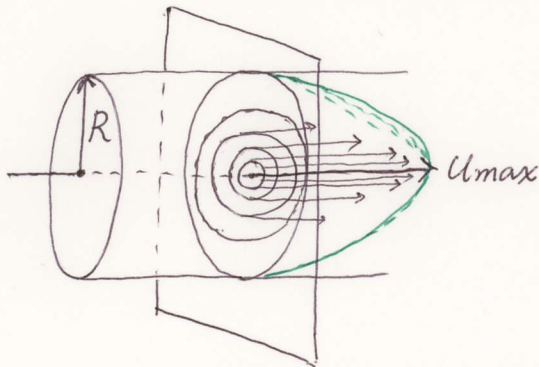
層流状態における流体の平均速度 U は最大速度 $u_{\max}$ の半分であることを示せ。

速度の一般式 (層流における) は、

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4L\mu} R^2 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \quad \text{と表現される。}$$

最大速度 $u_{\max}$ は、

$$r=0 \text{ (中心において) の時 において、} \quad u_{\max} = \frac{\Delta P}{4L\mu} R^2 \quad \text{--- ①}$$



ある断面での流体の速度 $u(r)$ は、

左図の様に、中心から $u_{\max}$ 、そして中心から r の距離にある同心円上の速度 $u(r)$ は全て同じ速度となっている。

$$\text{平均速度 } U = \frac{(\text{速度の合計})}{(\text{速度の数})}$$

断面の図・速度の数とは、断面の中の点の合計 = 面積

中心からの距離 r の速度の合計は、
 $u(r) \times (\text{速度の数})$
 $= u(r) \times (\text{円周の長さ}) = u(r) \times 2\pi r$

以上の考えから

$$\text{平均速度 } U = \frac{\text{全速度}}{\text{断面面積}} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) \times 2\pi r dr$$

愚直に解いて
いきなり...

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi R^2} \left[\int_0^R \frac{\Delta P R^2}{4L\mu} \cdot 2\pi r dr - \int_0^R \frac{\Delta P}{4L\mu} r^2 \cdot 2\pi r dr \right] \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \frac{\Delta P}{2L\mu} \pi R^2 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R - \frac{\Delta P}{2L\mu} \pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \right\} \\ &= \frac{\Delta P}{8L\mu} R^2 \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

①と②より

$$u_{\max} = 2U \quad \text{よって} \quad U = \frac{1}{2} u_{\max}$$